

DOI: 10.7652/xjtuxb201603006

连续收缩扩张气膜孔排冷却特性的数值模拟

周骏飞, 王新军, 张峰

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 为研究连续收缩扩张孔的冷却特性,在 C3X 静叶片上分别建立了连续收缩扩张气膜孔冷却模型、圆柱气膜孔冷却模型和展向扩张气膜孔冷却模型,连续收缩扩张气膜孔每排 23 个、孔间距为 20 mm,展向扩张孔每排 19 个、孔间距为 24 mm,圆柱孔每排 19 个、孔间距为 24 mm。同时,在叶片前部开设了一个 U 形冷却通道,尾部开设了一个直冷却通道,冷气通过这 2 个内部冷却通道进入气膜孔。利用 ANSYS-ICEM 商用软件对上述 3 种模型进行了结构化网格划分,采用 ANSYS-CFX 商用软件和 SST 湍流模型进行了数值计算和分析比较,结果表明:连续收缩扩张孔的气膜冷却效率高于圆柱孔和展向扩张孔,在孔口附近和高吹风比下的优势最明显;连续收缩扩张孔使冷气射流在相邻两孔的交汇处形成了类似反肾形涡结构,该涡的强度不大,但具有良好的延续性和较大的冷气覆盖面积;复合冷却时冷气射流脱离壁面的现象更明显,孔口附近总冷却效率低于绝热冷却效率。在连续收缩扩张孔的实际应用中选择偏大的吹风比和更小的入射角可以提高气膜冷却效率。

关键词: 收缩扩张孔;气膜冷却;内部冷却;静叶片;数值计算

中图分类号: TK263 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2016)03-0038-07

Numerical Simulation for Cooling Characteristics with Continuous Arranged Converging Slot-Hole Rows

ZHOU Junfei, WANG Xinjun, ZHANG Feng

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Continuously arranged converging slot-holes are set on a C3X stator, which contains a U-bend channel at the front of the airfoil and a radial channel near the trailing edge inside the airfoil by solidworks. Cylindrical hole model and fan-shaped hole model are also constructed in the same way. Each model has four rows of film cooling holes. In the slot-hole case, there are 23 holes with a pitch of 20 millimeters in one film cooling hole row. In the cylindrical and fan-shaped hole case, there are 19 holes with a pitch of 24 millimeters in one film cooling hole row. Cooling air is supplied to film cooling holes through the U-bend channel and the radial channel. These three models are meshed by structured grids with ANSYS-ICEM. ANSYS-CFX and SST turbulence model is used to calculate the turbulent flow. The adiabatic cooling performance of converging slot-holes is compared with that of cylindrical holes and fan-shaped holes in different blowing ratio, the heat transfer enhancement mechanism of converging slot-holes is analyzed, and the adiabatic cooling effectiveness and the overall cooling effectiveness are compared. The Result shows that converging slot-hole has the highest adiabatic cooling effectiveness and the advantages become more obvious at the larger blow ratio. A kind of vortex which looks like anti-kidney

收稿日期: 2015-07-08。 作者简介: 周骏飞(1990—),男,硕士生;王新军(通信作者),男,副教授。

网络出版时间: 2015-12-10

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20151210.1524.016.html>

vortex is found downstream of continuous arranged converging slot-holes. The intensity of the vortex is not very high but maintains in a long distance and increases the coverage of the coolant film on the surface of the stator. The internal cooling has a non-ignorable influence on the numerical result. As a consequence, conjugate cooling has less resistance to jet lift-off. The overall effectiveness is lower than the adiabatic effectiveness at the exit of slot-holes. In the practical application of the continuous arranged converging slot-hole rows, large blowing ratio and small injection angle are beneficial to promote the film cooling efficiency.

Keywords: converging slot-hole; film cooling; internal cooling; stator; numerical calculation

燃气轮机高温部件必须受到冷却保护,气膜冷却是在透平叶片表面形成低温气体保护层,使叶片能够承受更高的燃气温度。传统圆柱形气膜孔流动损失大,气膜覆盖率低,在高吹风比下容易产生射流而脱离壁面,且无法满足设计者的要求。Goldstein 率先提出了一种带有展向扩张的成型孔结构^[1]。Bunker 综述了 4 种典型扩张孔结构并进行了系统分析^[2],表明与传统的圆柱孔相比,扩张孔的气膜冷却效率更高,气膜覆盖面积更大,且在较高吹风比下有着明显的优势。Sargison 提出了一种由圆形逐步变为扁平槽缝的收缩扩张气膜孔结构^[3-4],其研究发现收缩扩张孔可进一步提高叶片的气膜冷却效率,降低叶栅气动损失,在孔的下游位置能保持均匀、稳定的气膜覆盖。Azzi 等在平板上对单一收缩扩张孔进行了数值模拟^[5]。朱惠人等对离散的收缩扩张孔排进行了实验研究和数值模拟^[6-7],分析了孔型提高气膜冷却效率的机理。

上述研究均以离散的收缩扩张孔为研究对象,而离散孔未能在叶片外表面形成一条连续的槽缝,孔与孔之间的气流交互作用以及孔排的冷却性能未能完全展现出来,另外以绝热效率作为评价指标,也未考虑壁面热传导的影响,而工程应用时叶片的气膜冷却和内部冷却是同时存在的。本文采用 ANSYS-CFX 商用软件数值研究了不同吹风比下连续布置的收缩扩张孔的气膜冷却特性和内、外部复合冷却特性。

1 计算模型和数值方法

1.1 计算模型

采用 Hylton 等设计的 C3X 静叶型^[8],并按相似理论放大了 3.9 倍。图 1 为数值计算模型,其中叶高为 549 mm,轴向弦长 $D_x = 235$ mm,节距为 457 mm。在叶片前部开设了一个 U 形冷却通道,尾部开设了一个直冷却通道。叶片上设置了 4 排气膜冷却孔,分别用 ss1、ss2、ps1、ps2 表示。连续收

缩扩张气膜孔每排 23 个,孔间距为 20 mm。展向扩张孔每排 19 个,孔间距为 24 mm,孔直径为 8 mm,展向扩张角度为 15° 。圆柱孔每排 19 个,孔间距为 24 mm,孔直径为 8 mm。上述孔排布置可确保 3 种孔型具有相同的最小通流截面积。3 种孔型下 ps1 和 ps2 的入射角度为 35° ,分别位于 0.15 倍和 0.6 倍的轴向弦长处;ss1、ss2 的入射角度为 55° ,分别位于 0.35 倍和 0.55 倍轴向弦长处。冷却空气从叶片上端面进入 U 形通道和直通道,并从气膜孔排出。U 形通道为 ss1、ss2、ps1 提供冷气,直通道为 ps2 提供冷气。

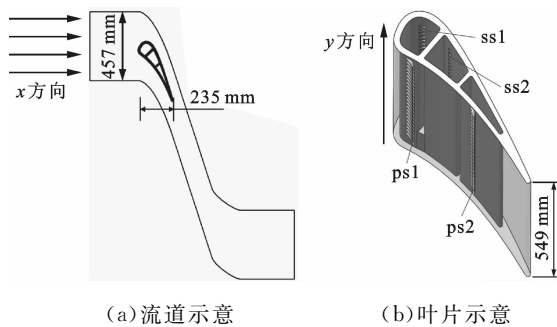


图 1 数值计算模型

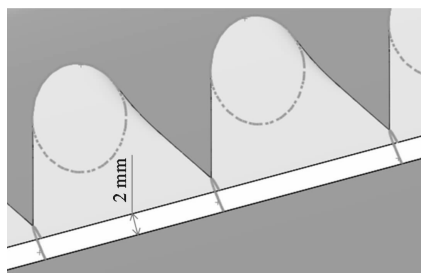
图 2 为 3 种孔型结构,其中收缩扩张孔如图 2a 所示。孔为圆形,分布在叶片内表面,直径为 10 mm,且沿展向逐步扩张,沿轴向逐步收缩。靠近叶片表面,相邻气膜孔相交并形成了一条连续的槽缝,槽缝宽度 $l = 2$ mm。

使用 ICEM 软件对计算模型进行了结构化网格划分,叶片、冷却通道及气膜冷却孔采用 O 型网格,冷却通道表面、叶片表面以及上下端壁网格进行加密处理。图 3 为连续收缩扩张气膜孔附近的网格示意。

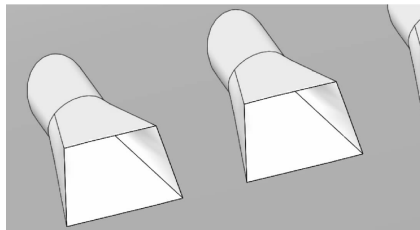
1.2 参数定义

本文中 x 为轴向(主流来流方向), y 为叶片展向(叶高方向), z 为叶片外表面法向。

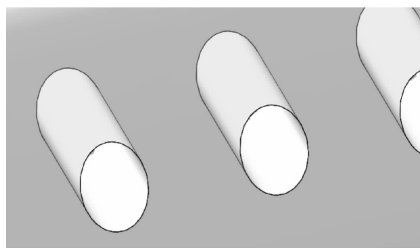
相对轴向弦长



(a)收缩扩张孔



(b)展向扩张孔



(c)圆柱孔

图2 3种气膜冷却孔型的结构

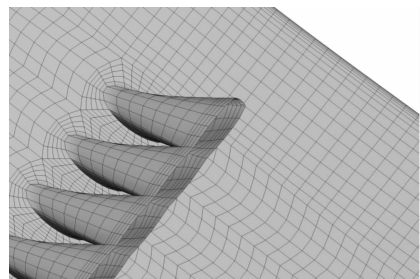


图3 连续收缩扩张气膜孔附近的网格示意

$$\bar{x} = x/D_x \quad (1)$$

式中: D_x 为叶片弦长沿 x 方向的投影。

叶片表面的对流换热系数

$$h_e = q_w / (T_\infty - T_w) \quad (2)$$

式中: q_w 为通过叶片表面的热流量。

定义吹风比

$$M = (u_c \rho_c) / (u_\infty \rho_\infty) \quad (3)$$

式中: ρ_c 为冷气密度; ρ_∞ 为主流气体密度; u_c 为冷气出口速度; u_∞ 为主流气体速度。

定义绝热冷却效率

$$\eta = (T_\infty - T_{aw}) / (T_\infty - T_c) \quad (4)$$

式中: T_∞ 为主流气体总温; T_{aw} 为壁面绝热温度; T_c 为冷却气流离开气膜孔时的温度。

定义总冷却效率

$$\varphi = (T_\infty - T_w) / (T_\infty - T_c) \quad (5)$$

式中: T_w 为壁面温度。

1.3 数值计算方法与网格无关性验证

采用 ANSYS-CFX 商用软件数值求解了叶片冷却气体与主流气体的三维定常黏性流动雷诺时均 N-S 方程, 同时进行了网格无关性和湍流模型验证。

图4为不同网格数时计算得到65%相对叶高处的绝热冷却效率。网格数大于320万时, 网格数对计算结果的影响显著降低, 网格数为520万、620万时计算结果差别极小。因此, 后续计算选定的网格数为520万。

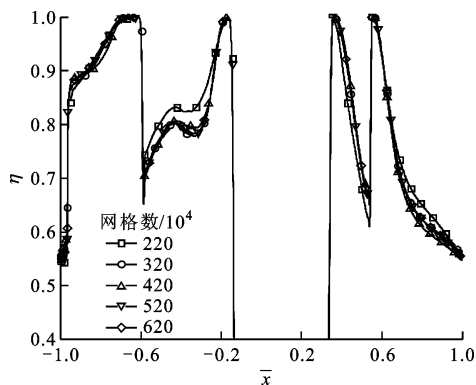


图4 网格无关性验证

本文同时涉及到内部冷却和气膜冷却2种冷却方式, 湍流模型的验证分为内部冷却湍流模型验证和外部气膜冷却湍流模型验证。内部冷却湍流模型验证的计算条件与文献[9]实验条件完全相同, 该实验为叶片内部通道气流冷却叶片、外部高温来流加热叶片的共轭换热实验。图5为4种湍流模型下计算得到的65%相对叶高处的叶片外表面对流换热系数分布与Jason实验结果[9]的对比。在压力面, 除 RNG $k-\epsilon$ 模型外的4种湍流模型预测结果均与实验数据吻合良好; 在吸力面, SST(含 $\gamma-\theta$ 转变)模型(SST- $\gamma-\theta$)能够预测叶片外部流动从层流到湍流的转变, 其在绝大部分区域与实验数吻合良好, 并在叶片前缘到吸力面的0.3倍轴向弦长内的误差小于20%, 这主要是叶片吸力面前缘气流不断加速、流动过程较复杂、对换热系数影响较大的缘故。

外部气膜冷却湍流模型验证的计算条件与Dyson等的实验条件[10]完全相同, 该实验是叶片在绝热条件下测量压力面单排圆柱形气膜孔气膜冷却效率的实验。图6为4种湍流模型下计算得到的压

力面气膜孔下游的冷却效率与实验结果的对比。可以看出, SST- $\gamma\theta$ 的计算结果与实验数据最为接近。

综上所述,本文的后续计算均选择 SST- $\gamma\theta$ 。

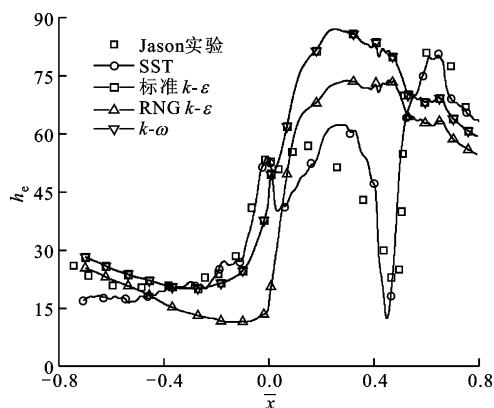
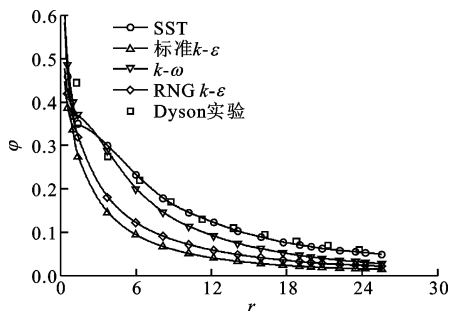


图5 内部冷却的湍流模型验证



r : 孔下游轴向距离与孔直径的比

图6 外部气膜冷却的湍流模型验证

2 数值计算结果与分析

计算条件同文献[10], 给定叶栅的主流进口速度、温度, 给定 U 形通道和直通道的冷气进口速度、温度, 设定流道沿周向为周期的边界条件, 出口压力取一个标准大气压。设定流体域工质为理想空气, 使用 Sutherland 公式对空气的导热系数和黏性系数进行修正。在内部冷却和气膜冷却的耦合计算时, 设定固体域的导热系数为 $1.04 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, 比热容为 $1.25 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ 。

2.1 连续收缩扩张孔的优势

在相同条件下, 对圆柱孔、展向扩张孔和连续收缩扩张孔 3 种气膜孔的冷却特性进行了数值研究。计算条件: 固体域为绝热; U 形通道的冷气进口速度为 16 m/s , 给定相应的各孔排吹风比 ($ss1$ 为 1.5 , $ss2$ 为 1.6 , $ps1$ 为 4.5); 给定的直通道冷气进口速度分别为 $2, 3, 4, 6, 8 \text{ m/s}$, 相应的 $ps2$ 吹风比分别为 $0.5, 0.7, 1.0, 1.5, 2.0$ 。

图 7 为 3 种孔型在 $ps2$ 下游 65% 相对叶高处的

绝热冷却效率对比。由于圆柱孔射流最易出现冷却气体脱离壁面, 且形成的肾形涡使主流高温气体被卷吸至叶片表面, 所以各吹风比下的绝热冷却效率均低于 0.4 , 孔口附近的绝热冷却效率最低。展向扩张孔对肾形涡的抑制效果较好, 孔口附近的绝热冷却效率较高, 整体绝热冷却效率大约是圆柱孔的 2 倍。连续收缩扩张孔的绝热冷却效率高于展向扩张孔, 它能将高冷却效率维持至约 0.7 倍的轴向弦长处, 这一优势随着吹风比的增大而增大。

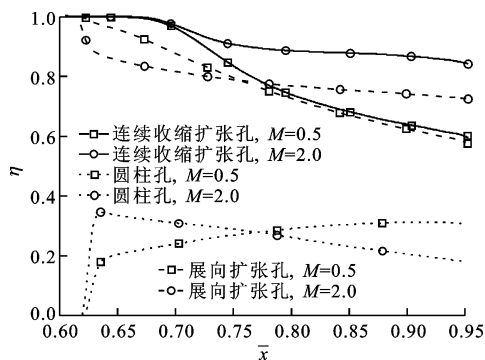


图7 3种孔型在 $ps2$ 下游 65% 相对叶高处的绝热冷却效率对比

2.2 连续收缩扩张孔的强化换热机理

图 8 为在吹风比为 1.0 下, $ps2$ 的某个收缩扩张孔及其相邻气膜孔下游的速度矢量图。冷气射流沿 z 方向的分速度在收缩扩张孔的交汇点最大, 该处的冷气射流间相互作用形成的涡结构使冷气射流向收缩扩张孔的射流中心区域流动, 因而在气膜孔下游形成了扁平椭圆状的类似反肾形涡结构, 该涡结构持续到了沿轴向距离约 40 倍槽缝宽度处。值得注意的是, 冷气进入气膜孔前有大约 90° 的横向流动, 而横向射流会影响冷却气在气膜孔内的流动^[11], 使得涡结构并非完全对称, 该涡与肾形涡不同的是, 它有助于冷气沿展向扩散, 并使得射流能更好地贴附于叶片表面, 这将是 2.1 节中的连续收缩扩张孔孔口附近以及整个孔排下游的绝热冷却效率要高于展向扩张孔的原因。上述分析结果与文献[6]中离散布置的收缩扩张孔的部分实验结果吻合, 然而涡强度却没有文献[6]中的高, 这是连续布置的收缩扩张孔使冷气在到达孔口前就与相邻孔的冷气汇合, 从而导致冷却气流间的相互作用位置前移, 同时表现出部分槽缝孔的特性, 并使类反肾形涡提前出现, 出口射流更均匀。

图 9 为吹风比分别为 $0.5, 2.0$ 时, $ps2$ 孔排部分冷却气流的流线。无论吹风比高还是低, 冷气均可较好地贴附在叶片表面。

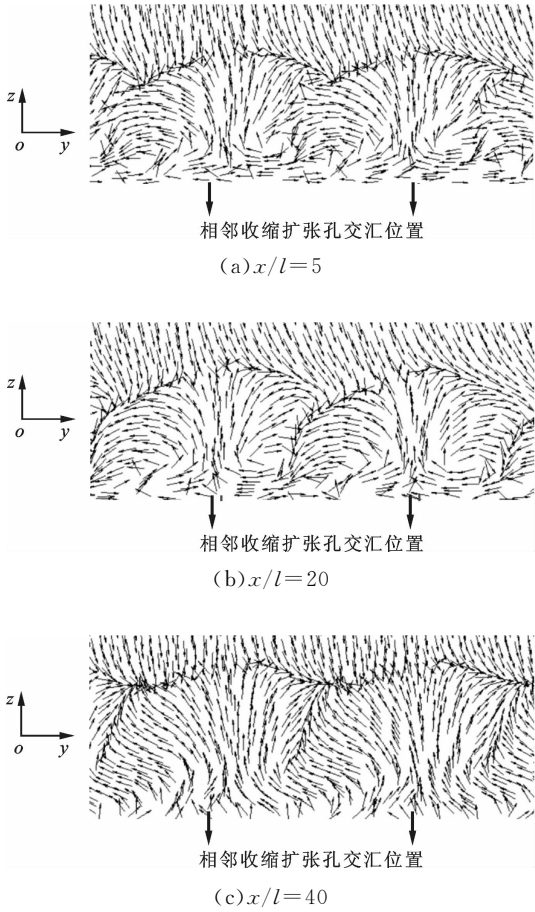


图 8 气膜孔下游的速度矢量图

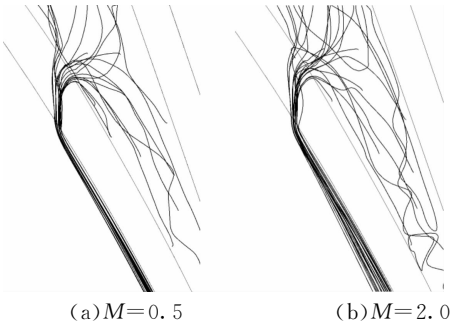


图 9 ps2 孔排的部分冷却气流流线

2.3 连续收缩扩张孔的复合冷却特性

设定固体域为导热,直通道的冷气进口速度为 4 m/s,U 形通道进口冷气速度分别为 10、11、12、13 m/s。表 1 为不同 U 形通道在冷气进口速度下的孔排吹风比。

图 10 为叶片内部冷却与外部气膜冷却耦合计算得到的部分冷却气的流线。为了比较,图 11 给出了单独气膜冷却时的计算结果。耦合冷却时,ps1 冷气流出后紧贴叶片表面,而吸力面射流发生脱离壁面的现象,但随着吹风比的增大,该现象减弱。单独气膜冷却时,冷气射流脱离壁面的现象不明显,而

表 1 不同 U 形通道在冷气进口速度下的孔排吹风比

速度/ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	M			
	ss1	ss2	ps1	ps2
10	0.9	0.9	2.0	1.5
11	1.1	1.0	2.4	1.4
12	1.2	1.1	2.9	1.4
13	1.3	1.2	3.4	1.3

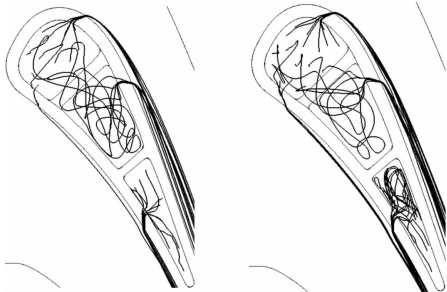


图 10 耦合冷却时的部分冷却气流流线

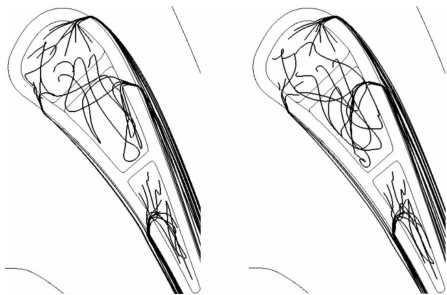


图 11 单独气膜冷却时的部分冷却气流流线

吸力面最为明显。
图 12 为内部与外部气膜冷却耦合计算得到的 65% 相对叶高处的总冷却效率。吸力面上,总冷却效率随 U 形通道进口冷气速度的增加而增大,这主

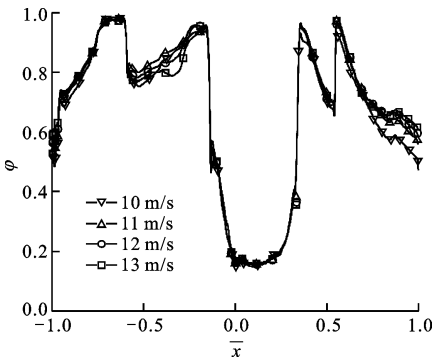


图 12 耦合冷却时 65% 相对叶高处的总冷却效率

要是冷气射流脱离壁面的现象随吹风比的增加而逐渐消失。压力面上, ps1 下游的总冷却效率随着吹风比的增大而先增后减, 最佳吹风比约为 2.4。ps2 下游的总冷却效率也有一定程度的增大, 这是受上游 ps1 影响的缘故, 当 ps1 吹风比增大时, ps2 的吹风比略微下降, 所以冷却效率增大。

图 13 为单独气膜冷却计算得到的 65% 相对叶高处的绝热冷却效率。吸力面上, 绝热冷却效率随着 U 形通道进口冷气速度的增加几乎保持不变。压力面上, ps1 下游的绝热冷却效率随吹风比的增加而降低, 吹风比大于 2.4 时射流脱离壁面的现象明显, 吹风比分别为 2.0 和 2.4 时绝热冷却效率相差不大, 因此无内部冷却时压力面的最佳吹风比略小于 2。

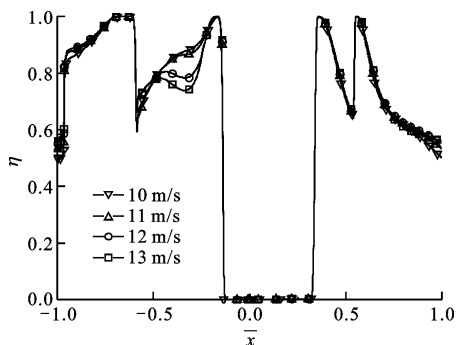


图 13 单独气膜冷却时 65% 相对叶高处的绝热冷却效率

图 14 为 U 形通道进口冷气速度为 13 m/s 时, 65% 相对叶高处的总冷却效率和绝热冷却效率。耦合冷却时, 孔口冷气射流的速度分布以及冷气在内部通道的速度分布与单独气膜冷却时相比有一定差异, 冷气在内部通道开始换热且在到达孔口时温度已有所提高, 因而孔口附近的绝热冷却效率要高于总冷却效率。ps1 下游的绝热冷却效率先大于总冷却效率, 后逐渐低于总冷却效率, ps2 下游的绝热冷

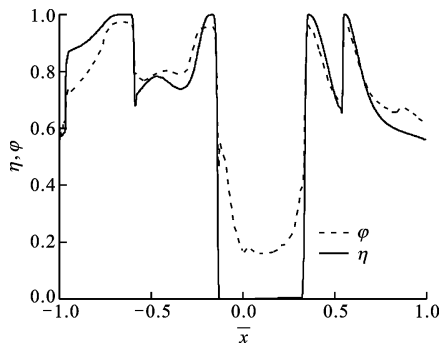


图 14 13 m/s 下 2 种冷却在 65% 相对叶高处的总冷却效率和绝热冷却效率

却效率则一直大于总冷却效率。ss1 和 ss2 遵循着和 ps1 类似的结论。在叶片前缘, 总冷却效率比绝热冷却效率高 0.2 左右。

实际应用时, 气膜冷却和内部冷却是同时存在的, 所以上述研究为连续收缩扩张孔的实际应用提供了更可靠的理论依据。

3 结 论

本文基于 C3X 静叶数值研究了连续收缩扩张孔单独气膜冷却特性和耦合冷却特性, 比较了圆柱孔、展向扩张孔和连续收缩扩张孔的气膜冷却性能, 分析了连续收缩扩张孔的强化换热机理, 对比了耦合冷却和单独气膜冷却的冷却效率, 结论如下。

(1) 连续收缩扩张孔的整体冷却性能要优于圆柱孔和展向扩张孔, 在孔口附近和高吹风比 (2.0) 下, 连续收缩扩张孔的优势最明显。

(2) 冷气通过连续布置的收缩扩张孔后在相邻两孔交界处形成了类似反肾形涡结构, 该涡强度不大, 但具有良好的持续性, 使冷气射流紧贴壁面并增加了气膜覆盖面积。

(3) 耦合冷却下冷气射流脱离壁面的现象比单独气膜冷却时更为严重。耦合冷却时孔口附近的总冷却效率低于绝热冷却效率, ps1 的最佳吹风比 (2.4) 要大于单独气膜冷却时 ps1 的最佳吹风比 (2.0)。在连续收缩扩张孔的实际应用中, 选择偏大的吹风比和更小的入射角可以降低射流脱离壁面带来的不利影响, 进一步提高气膜冷却效率。

参考文献:

- [1] GOLDSTEIN R J, ECKERT E R G, BURGGRAF F. Effects of hole geometry and density on three-dimensional film cooling [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1974, 17(5): 595-607.
- [2] BUNKER R S. A review of shaped hole turbine film-cooling technology [J]. ASME Journal of Heat Transfer, 2005, 127(4): 441-453.
- [3] SARGISON J E, GUO S M, OLDFIELD M L G, et al. A converging slot-hole film-cooling geometry: part 1 Low-speed flat-plate heat transfer and loss [J]. ASME Journal of Turbomachinery, 2002, 124(3): 453-460.
- [4] SARGISON J E, GUO S M, OLDFIELD M L G, et al. A converging slot-hole film-cooling geometry: part 2 Transonic nozzle guide vane heat transfer and loss [J]. ASME Journal of Turbomachinery, 2002, 124

- (3): 461-471.
- [5] AZZI A, JUBRAN B A. Numerical modelling of film cooling from converging slot-hole [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2007, 43(4): 381-388.
- [6] 刘存良, 朱惠人, 白江涛. 收缩-扩张形气膜孔提高气膜冷却效率的机理研究 [J]. *航空动力学报*, 2008, 23(4): 598-604.
- LIU Cunliang, ZHU Hui ren, BAI Jiangtao. Study on the physics of film-cooling effectiveness enhancement by the converging-expanding hole [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2008, 23(4): 598-604.
- [7] 刘存良, 朱惠人, 白江涛, 等. 基于瞬态液晶测量技术的收缩-扩张形孔气膜冷却特 [J]. *航空学报*, 2009, 30(5): 812-818.
- LIU Cunliang, ZHU Hui ren, BAI Jiangtao, et al. Film cooling characteristics of converging-expanding hole with transient liquid crystal measurement technique [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2009, 30(5): 812-818.
- [8] HYLTON L D, MIHELIC M S, TURNER E R, et al. Analytical and experimental evaluation of the heat transfer distribution over the surfaces of turbine vanes, NASA 168015 [R]. Washington, DC, USA: NASA 1983.
- [9] DEES J E, BOGARD D G, LEDEZMA G A, et al. Experimental measurements and computational predictions for an internally cooled simulated turbine vane [J]. *ASME Journal of Turbomachinery*, 2012, 134(6): 061003.
- [10] DYSON T E. Experimental and computational investigation of film cooling on a large scale C3X turbine vane including conjugate effects [D]. Texas, USA: University of Texas at Austin, 2012: 76-85.
- [11] MCCLINTIC J W, KLAVERTER S R, WINKA J R, et al. The effect of internal crossflow on the adiabatic effectiveness of compound angle film cooling holes [J]. *ASME Journal of Turbomachinery*, 2015, 137(7): 071006.
- (编辑 苗凌)
-
- (上接第7页)
- fractal theory [J]. *ASME Journal of Tribology*, 2010, 132(1): 011401.
- [10] ZHANG Xueliang, WANG Nanshan, LAN Guosheng, et al. Tangential damping and its dissipation factor models of joint interfaces based on fractal theory with simulations [J]. *ASME Journal of Tribology*, 2014, 136(1): 011704.
- [11] 尤晋闽, 陈天宁. 悬臂梁平面结合面参数的识别技术研究 [J]. *西安交通大学学报*, 2008, 42(11): 1323-1326.
- YOU Jinmin, CHEN Tianning. Parameters identification for joint surfaces of cantilever beam [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2008, 42(11): 1323-1326.
- [12] 张学良, 温淑花, 兰国生, 等. 平面结合面切向接触阻尼分形模型及其仿真 [J]. *西安交通大学学报*, 2011, 45(5): 74-77, 136.
- ZHANG Xueliang, WEN Shuhua, LAN Guosheng, et al. Fractal model for tangential contact damping of plane joint interfaces with simulation [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2011, 45(5): 74-77, 136.
- [13] 黄康, 赵韩, 陈奇. 两圆柱体表面接触承载能力的分形模型研究 [J]. *摩擦学学报*, 2008, 28(6): 529-533.
- HUANG Kang, ZHAO Han, CHEN Qi. Research of fractal contact model on contact carrying capacity of two cylinders' surface [J]. *Tribology*, 2008, 28(6): 529-533.
- [14] 陈奇, 黄康, 张彦, 等. 两任意轮廓弹性体接触应力计算的分形模型研究 [J]. *机械强度*, 2012, 34(4): 557-561.
- CHEN Qi, HUANG Kang, ZHANG Yan, et al. Research on fractal model of calculating the contact stress about two elastic body with arbitrary profile [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2012, 34(4): 557-561.
- [15] 田红亮, 刘芙蓉, 方子帆, 等. 引入各向同性虚拟材料的固定结合部模型 [J]. *振动工程学报*, 2013, 26(4): 561-573.
- TIAN Hongliang, LIU Furong, FANG Zifan, et al. Immovable joint surface's model using isotropic virtual material [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2013, 26(4): 561-573.
- [16] TIAN Hongliang, LI Bin, LIU Hongqi, et al. A new method of virtual material hypothesis-based dynamic modeling on fixed joint interface in machine tools [J]. *Elsevier International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 2011, 51(3): 239-249.
- [17] HARDY G H. Weierstrass's non-differentiable function [J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1916, 17(3): 301-325.
- (编辑 葛赵青)